CHAPITRE XIX.

COMPARAISON DES UNITÉS ÉLECTROSTATIQUES ET DES UNITÉS ÉLECTROMAGNÉTIQUES.

Détermination du nombre d'unités électrostatiques contenues dans une unité électromagnétique.

768. La grandeur absolue des unités électriques dépend, dans les deux systèmes, des unités de longueur, de temps et de masse, qui ont été adoptées; la façon dont elles dépendent de ces unités n'est pas la même dans les deux systèmes; par suite, le nombre qui exprime le rapport des unités électriques est différent, suivant que l'on emploie les différentes unités de longueur et de temps.

On voit, par le Tableau des dimensions des unités, donné au § 628, que le nombre des unités électrostatiques d'électricité contenues dans une unité électromagnétique varie en raison inverse de la grandeur de l'unité de longueur, et en raison directe de la grandeur de l'unité de temps qui ont été adoptées.

Si donc on détermine une vitesse qui soit numériquement représentée par ce nombre, et qu'ensuite on vienne à adopter de nouvelles unités de longueur et de temps, le nombre qui représente cette vitesse restera, dans le nouveau système de mesures, le nombre des unités électrostatiques d'électricité contenues dans une unité électromagnétique.

Dès lors, cette vitesse, qui indique la relation des phénomènes électrostatiques et des phénomènes électromagnétiques, est une quantité naturelle de grandeur déterminée, et la mesure de cette quantité constitue l'une des plus importantes recherches de l'électricité.

Pour montrer que cette quantité que nous cherchons est bien réellement une vitesse, remarquons que, dans le cas de deux courants parallèles, l'attraction à laquelle est soumise la longueur a d'un des courants est, d'après le § 686,

$$F = 2CC'\frac{a}{b},$$

où C et C′ sont les valeurs numériques des intensités, en mesure électromagnétique, et b est la distance des conducteurs. Si nous faisons $b = 2a$,

$$F = CC'.$$

Or, la quantité d'électricité transmise dans le temps t par le courant C est, en mesure électromagnétique, Ct, et, en mesure électrostatique, nCt, n étant le nombre des unités électrostatiques contenues dans une unité électromagnétique.

Supposons deux petits conducteurs chargés des quantités d'électricité que transmettent les deux courants dans le temps t, et plaçons-les à la distance r l'un de l'autre. La répulsion qui s'exerce entre eux est

$$F' = \frac{CC'n^2t^2}{r^2}.$$

Choisissons la distance r, de façon que cette répulsion soit égale à l'attraction des deux courants,

$$\frac{CC'n^2t^2}{r^2} = CC';$$

d'où

$$r = nt,$$

c'est-à-dire que la distance r doit croître n fois plus vite que le temps. Donc n est une vitesse dont la grandeur absolue est la même, quelles que soient les unités adoptées.

769. Pour nous former une conception physique de cette vitesse, imaginons une surface plane chargée d'électricité, à la densité superficielle électrostatique σ, et se mouvant dans son propre plan avec la vitesse v. Cette surface électrisée mobile équivaudra à une nappe de courant, dont l'intensité serait, pour chaque unité de largeur de la surface électrisée, σv en mesure électrostatique ou $\frac{1}{n}\sigma v$ en mesure électromagnétique, n étant le nombre des unités électrostatiques contenues dans l'unité électromagnétique. Si une deuxième surface plane, parallèle à la première et électrisée à la densité superficielle σ', se meut dans la même direction avec la vitesse v', elle sera équivalente à une deuxième nappe de courant.

La répulsion électrostatique entre les deux surfaces électrisées est, d'après le § 124, $2\pi\sigma\sigma'$ par unité d'aire de chacune des surfaces opposées.

L'attraction électromagnétique entre les deux courants superficiels est, d'après le § 658, $2\pi uu'$ par unité d'aire, u et u' étant les densités superficielles de deux courants en mesure électromagnétique.

Mais

$$u = \frac{1}{n}\sigma v, \qquad u' = \frac{1}{n}\sigma' v',$$

de sorte que l'attraction est

$$2\pi\sigma\sigma'\frac{vv'}{n^2}.$$

Le rapport de l'attraction à la répulsion est celui de vv' à n^2. Donc, puisque l'attraction et la répulsion sont des quantités de même espèce, n doit être une quantité de même espèce que v, c'est-à-dire une vitesse. Si nous supposons que la vitesse des deux surfaces mobiles soit *égale à n*, l'attraction sera égale à la répulsion, et il n'y aura pas d'action mécanique entre les surfaces. Donc nous pouvons définir le rapport des unités électriques comme une vitesse telle qu'il ne s'exerce point d'action mécanique entre deux surfaces électrisées se mouvant avec cette vitesse dans la même direction. Comme cette vitesse est d'environ 288000^{km} par seconde, il est impossible de réaliser l'expérience que l'on vient de décrire (1).

770. Si l'on pouvait rendre la densité électrique superficielle et la vitesse assez grande pour que la force magnétique devienne mesurable, on pourrait au moins vérifier notre hypothèse qu'un corps électrisé en mouvement est équivalent à un courant électrique.

Nous pouvons admettre (2) que, dans l'air, une surface électrisée commence à se décharger en émettant des étincelles quand la force électrique $2\pi\sigma$ atteint la valeur 130. La force magnétique, due à un courant superficiel, est $2\pi\sigma\frac{v}{n}$. En Angleterre, la force magnétique horizontale est d'environ 0,175. Donc, une surface, électrisée au plus haut degré et se mouvant à la vitesse de 100^{m} par seconde, agirait sur un aimant avec une force égale à $\frac{1}{4000}$ environ de la force horizontale terrestre, ce qui est une quantité mesurable. La surface électrisée pourrait être celle d'un disque non conducteur tournant dans le plan du méridien magnétique; l'aimant pourrait être placé près de la partie montante ou de la partie descendante du disque, et serait protégé de l'action électrostatique par un écran métallique. Je ne sache pas que cette expérience ait été essayée jusqu'à ce jour (3).

(1) [Maxwell omet de dire par rapport à quoi les deux surfaces doivent avoir cette vitesse commune.] (P.)

(2) Sir W. THOMSON, *R. S. Proc.*, ou *Reprint*, Chap. XIX.

(3) [Cette expérience a été faite par Rowland (*American Journal*, 1878) et a donné des résultats conformes à l'hypothèse de Maxwell.] (P.)

I. — Comparaison des unités d'électricité.

771. Puisque le rapport de l'unité électromagnétique à l'unité électrostatique est représenté par une vitesse, nous le désignerons dorénavant par v. La première détermination numérique de cette vitesse a été faite par Weber et Kohlrausch (¹).

Leur méthode consiste à mesurer une même quantité d'électricité, d'abord en mesure électrostatique, et ensuite en mesure électromagnétique.

La quantité d'électricité qu'ils mesuraient était la charge d'une bouteille de Leyde. On la mesure en unités électrostatiques, comme étant le produit de la capacité de la bouteille par la différence des potentiels de ses armatures. On détermine la capacité de la bouteille en la comparant à celle d'une sphère suspendue dans un espace libre, à une grande distance de tout autre corps. La capacité d'une pareille sphère s'exprime, en mesure électrostatique, par son rayon. Ainsi, la capacité de la bouteille peut être obtenue et exprimée comme une certaine longueur. (*Voir* § 227.)

On mesure la différence de potentiel des armatures de la bouteille en les reliant aux électrodes d'un électromètre dont les constantes avaient été déterminées avec soin : on connaît ainsi la différence de potentiel E en mesure électrostatique.

En multipliant E par la capacité c de la bouteille, la charge de la bouteille est exprimée en mesure électrostatique.

Pour mesurer cette charge en mesure électromagnétique, on décharge la bouteille à travers la bobine d'un galvanomètre. Le courant instantané agissant sur l'aimant du galvanomètre lui communique une certaine vitesse angulaire, et l'aimant s'écarte jusqu'à une certaine élongation, pour laquelle sa vitesse se trouve entièrement détruite par la résistance due au magnétisme terrestre.

Si l'on observe cette élongation extrême de l'aimant, on peut déterminer, en mesure électromagnétique, la quantité d'électricité transmise par le courant; ainsi qu'on l'a vu au § 748, la formule est

$$Q = \frac{H}{G}\frac{T}{\pi}2\sin\tfrac{1}{2}\theta,$$

(¹) *Electrodynamische Maasbestimmungen*, et *Pogg. Ann.*, XCIX, 10 août 1856.

où Q est la quantité d'électricité en mesure électromagnétique. Nous avons donc à déterminer les quantités suivantes :

H intensité de la composante horizontale du magnétisme terrestre, (*voir* § 456);
G constante principale du galvanomètre (*voir* § 700);
T durée d'une oscillation simple de l'aimant;
θ déviation due au courant instantané.

La valeur de v, obtenue par MM. Weber et Kohlrausch, était de

$$U = 310740000^{m} \text{ par seconde.}$$

Il est difficile d'évaluer exactement la capacité de la bouteille de Leyde, en raison de la propriété des diélectriques solides appelée *absorption électrique*. La capacité apparente varie suivant le temps qui s'écoule entre l'origine de la charge ou de la décharge et l'instant où l'on mesure le potentiel : plus ce temps est long, plus grande est la valeur que l'on trouve pour la capacité de la bouteille.

Or le temps nécessaire pour obtenir une lecture à l'électromètre est grand relativement au temps pendant lequel la décharge se produit à travers le galvanomètre; par suite, l'évaluation de la décharge en mesure électrostatique est probablement trop grande, et la valeur de v que l'on en déduit est, sans doute aussi, trop grande.

II. — Expression de v sous forme de résistance.

772. Deux autres méthodes de détermination de v conduisent à exprimer sa valeur en fonction de la résistance d'un conducteur donné, résistance qui, dans le système électromagnétique, s'exprime aussi par une vitesse.

Dans la forme expérimentale adoptée par Sir W. Thomson, on fait passer un courant constant à travers un fil de grande résistance. On mesure en unités électrostatiques la force électromotrice qui détermine le passage du courant dans le fil, en reliant les bouts du fil aux électrodes d'un électromètre absolu (§ 217 et 218). L'intensité du courant dans le fil est mesurée en mesure électromagnétique, par la déviation de la bobine d'un électrodynamomètre qui est traversé par le courant § 725. Enfin, on détermine la résistance du circuit, en mesure électromagnétique, par comparaison avec une bobine ou un ohm étalon. En multipliant l'intensité du courant par cette résistance, nous obtenons, en mesure électromagnétique, la force électromotrice, et, en comparant cette valeur à la valeur électrostatique, on obtient la valeur de v.

Cette méthode exige que l'on détermine à la fois deux forces, au moyen de l'électromètre et de l'électrodynamomètre, et ce n'est que le rapport de ces forces qui paraît dans le résultat.

773. L'auteur a employé une autre méthode dans laquelle ces forces, au lieu d'être mesurées séparément, sont directement opposées. Les bouts d'une bobine de grande résistance sont reliés à deux disques parallèles, dont l'un est mobile. La même différence de potentiels, qui détermine le courant dans la résistance, produit une attraction des disques. En même temps, un courant électrique qui, dans les expériences, était différent du courant principal, traverse, en sens contraire, deux bobines fixées au dos, l'une du disque fixe et l'autre du disque mobile : ces bobines se repoussent l'une l'autre. En réglant la distance des disques, on peut équilibrer exactement l'attraction par la répulsion, en même temps qu'un autre observateur détermine, au moyen d'un galvanomètre différentiel muni de dérivations, le rapport du courant principal au courant auxiliaire.

Dans cette expérience, la seule mesure qui doive être rapportée à un étalon matériel est celle de la grande résistance, qu'il faut déterminer en mesure absolue par comparaison avec l'ohm. Les autres mesures ne servent qu'à déterminer des rapports et peuvent être faites en fonction de n'importe quelle unité arbitraire.

Ainsi, le rapport des deux forces est un rapport d'égalité.

Le rapport des deux intensités se déduit de la comparaison des résistances qu'il faut interposer pour qu'il n'y ait point de déviation au galvanomètre différentiel.

La force attractive dépend du carré du rapport du diamètre des disques à leur distance.

La force répulsive dépend du rapport du diamètre des bobines à leur distance.

La valeur de v s'exprime donc directement en fonction de la résistance de la grande bobine, qui elle-même a été comparée à l'ohm.

La valeur de v, trouvée par la méthode de Thomson, est de 28,2 ohms (¹); par la méthode de Maxwell, elle est de 28,8 ohms (²).

(¹) *Report of the British Association*, p. 434; 1869.

(²) *Phil. Trans.*, p. 643, 1868, et *Report of the British Association*, p. 436; 1869.

III. — Capacité électrostatique en mesure électromagnétique.

774. La capacité d'un condensateur peut être déterminée en mesure électromagnétique, en comparant la force électromotrice qui produit la charge et la quantité d'électricité contenue dans le courant de décharge. Au moyen d'une pile, on établit un courant dans un circuit comprenant une bobine de grande résistance. On charge le condensateur en mettant ses électrodes en contact avec celles de la bobine. Le courant qui traverse la bobine est mesuré par la déviation qu'il produit dans un galvanomètre. Soit φ cette déviation; alors, d'après le § 742,

$$\gamma = \frac{H}{G}\operatorname{tang}\varphi,$$

où H est la composante horizontale du magnétisme terrestre et G la constante principale du galvanomètre.

Si R est la résistance de la bobine à travers laquelle on fait passer le courant, la différence des potentiels, aux extrémités de cette bobine, est

$$E = R\gamma,$$

et la charge électrique accumulée dans le condensateur dont la capacité, en mesure électromagnétique, est C, est

$$Q = EC.$$

Détachons alors du circuit les électrodes du condensateur et ensuite celles du galvanomètre, et, quand l'aimant du galvanomètre sera devenu immobile à sa position d'équilibre, relions les électrodes du condensateur à celles du galvanomètre. Un courant instantané traverse le galvanomètre, et lance l'aimant jusqu'à l'élongation extrême θ. Alors, si la décharge est égale à la charge, on doit avoir, d'après le § 748,

$$Q = \frac{H}{G}\frac{T}{\pi}2\sin\tfrac{1}{2}\theta.$$

Nous obtenons ainsi, pour valeur de la capacité du condensateur, en mesure électromagnétique,

$$C = \frac{T}{\pi}\frac{1}{R}\frac{2\sin\frac{1}{2}\theta}{\operatorname{tang}\varphi}.$$

La capacité du condensateur se trouve ainsi déterminée en fonction des quantités suivantes :

T, durée d'oscillation de l'aimant du galvanomètre, de sa position d'équilibre à sa position d'équilibre;

R, résistance de la bobine;

θ, limite extrême de l'oscillation produite par la décharge;
φ, déviation constante due au courant qui traverse la bobine R.

Cette méthode a été employée, par le professeur Fleeming Jenkin, pour déterminer la capacité de condensateurs en mesure électromagnétique.

Si c est la capacité, en mesure électrostatique, du même condensateur, capacité obtenue par comparaison avec un condensateur dont on puisse calculer la capacité d'après ses éléments géométriques,

$$c = v^2 C,$$

d'où

$$v^2 = \pi R \frac{c}{T} \frac{\operatorname{tang}\varphi}{2\sin\frac{1}{2}\theta}.$$

La quantité v peut donc être trouvée de cette manière. Elle dépend de la détermination de R, en mesure électromagnétique; mais, comme elle ne renferme que la racine carrée de R, une erreur sur cette détermination n'affecterait pas autant la valeur de v que dans les méthodes des § 772, 773.

Courant intermittent.

775. Si le fil d'un circuit de pile est coupé en un certain point et que l'on relie les deux bouts aux armatures d'un condensateur, le courant entrera dans le condensateur avec une intensité qui diminuera à mesure que la différence des potentiels du condensateur augmentera; et, quand le condensateur aura reçu toute la charge qui correspond à la force électromotrice qui agit sur le fil, le courant cessera entièrement.

Si l'on détache les électrodes du condensateur des bouts du fil et qu'on les rattache dans l'ordre inverse, le condensateur commencera par se décharger dans le fil, puis se chargera de nouveau en sens inverse; de sorte que le fil sera parcouru par un courant instantané, représentant en tout le double de la charge du condensateur.

Au moyen d'un organe mécanique appelé *commutateur* (*wippe*), l'inversion des communications du condensateur peut être reproduite à des intervalles de temps réguliers, chaque intervalle étant égal à T. Si cet intervalle est suffisamment long pour permettre au condensateur de se décharger entièrement, la quantité d'électricité transmise dans le fil à chaque intervalle sera $2EC$, E étant la force électromotrice et C la capacité du condensateur.

Si l'aimant du galvanomètre compris dans le circuit est lesté de façon que ses oscillations soient assez lentes pour qu'un grand nombre de décharges du condensateur puissent se produire pendant la durée d'une oscillation de l'aimant, cette série de décharges agit sur l'aimant comme un courant permanent d'intensité,

$$\frac{2EC}{T}.$$

Si maintenant on retire le condensateur, et qu'on mette à sa place une résistance dont on règle la valeur jusqu'à ce que le courant permanent qui traverse le galvanomètre produise la même déviation que la série de décharges, et si, dans ce cas, la résistance du circuit total est R,

$$\frac{E}{R} = \frac{2EC}{T}, \tag{1}$$

ou

$$R = \frac{T}{2C}. \tag{2}$$

On peut ainsi comparer un condensateur pourvu de son commutateur en mouvement à un fil d'une certaine résistance électrique; et, pour mesurer cette résistance électrique, on peut se servir d'une quelconque des méthodes décrites aux § 345 à 357 pour la mesure des résistances.

776. A cet effet, on peut substituer un condensateur et son commutateur à l'un quelconque des fils, dans la méthode du galvanomètre différentiel (§ 346) ou dans celle du pont de Wheatstone (§ 347). Dans l'une ou l'autre méthode, supposons que l'on ait obtenu une déviation nulle du galvanomètre, d'abord avec le condensateur et son commutateur, et ensuite avec une bobine de résistance R_1 mise à sa place; la quantité $\frac{T}{2C}$ sera mesurée par la résistance du circuit dont fait partie la bobine R_1 et qui comprend en outre la pile et le reste des conducteurs. Donc la résistance R, que nous avons à calculer, est égale à R_1, résistance de la bobine, plus R_2, résistance du reste du circuit, y compris la pile, les extrémités de la bobine de résistance étant prises pour électrodes de ce système.

Dans le cas du galvanomètre différentiel et du pont de Wheatstone, il n'est pas nécessaire de faire une seconde expérience en substituant une bobine de résistance au condensateur. La valeur de la résistance équivalente au condensateur peut se calculer d'après les autres résistances données du système.

Employant les notations du § 347, et supposant le condensateur et son commutateur substitués au conducteur AC du pont de Wheatstone, le galvanomètre en OA, et la déviation nulle. Nous savons que la résistance d'une bobine qui, placée en AC, donnerait une déviation nulle, est donnée par la formule

$$b = \frac{C\gamma}{\beta} = R_1. \tag{3}$$

L'autre partie R_2 de la résistance est celle du système de conducteurs AO, OC, AB, BC et OB, les points A et C étant considérés comme les électrodes. On a donc

$$R_2 = \frac{\beta(c+a)(\gamma+a)+ca(\gamma+a)+\gamma a(c+a)}{(c+a)(\gamma+a)+\beta(c+a+\gamma+a)}. \tag{4}$$

Dans cette expression, a représente la résistance intérieure de la pile et de ses connexions, dont on ne peut déterminer la valeur avec précision; mais, si on la rend faible relativement aux autres résistances, cette incertitude n'affectera que légèrement la valeur de R_2.

La valeur de la capacité du condensateur, en mesure électromagnétique, est

$$C = \frac{T}{2(R_1+R_2)}. \tag{5}$$

777. Si le condensateur a une grande capacité et que le commutateur ait un mouvement très rapide, le condensateur peut n'être pas entièrement déchargé à chaque inversion. L'équation du courant électrique pendant la décharge est

$$Q + R_2 C\frac{dQ}{dt} + EC = 0, \tag{6}$$

Q étant la charge, C la capacité du condensateur, R_2 la résistance du reste du système compris entre les électrodes, E la force électromotrice due aux communications avec la pile; d'où

$$Q = (Q_0 + EC)e^{-\frac{t}{R_2C}} - EC, \tag{7}$$

où Q_0 est la valeur initiale de Q.

Si τ est le temps pendant lequel le contact est maintenu à chaque décharge, la quantité qui passe dans chaque décharge est

$$Q = 2EC\frac{1-e^{-\frac{\tau}{R_2C}}}{1+e^{-\frac{\tau}{R_2C}}}. \tag{8}$$

Faisant dans l'équation (4) c et γ considérables relativement à β, a ou α, le temps représenté par R_2C peut être rendu assez petit, par rapport à τ, pour que l'on puisse calculer la valeur de l'exponentielle en se servant de la valeur de C tirée de l'équation (5). On trouve ainsi

$$\frac{\tau}{R_2 C} = 2\,\frac{R_1 + R_2}{R_2}\,\frac{\tau}{T}, \tag{9}$$

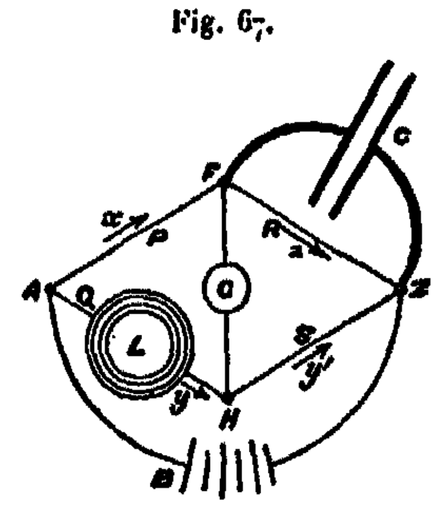
où R_1 est la résistance qui doit être substituée au condensateur pour produire un effet équivalent. R_2 est la résistance du reste du système; T est l'intervalle de temps compris entre le commencement de deux décharges consécutives, et τ est la durée de chaque décharge. On obtient ainsi, pour valeur corrigée de C, en mesure électromagnétique,

$$C = \frac{1}{2}\,\frac{T}{R_1 + R_2}\,\frac{1 + e^{-2\frac{R_1+R_2}{R_2}\frac{\tau}{T}}}{1 - e^{-2\frac{R_1+R_2}{R_2}\frac{\tau}{T}}}. \tag{10}$$

IV. — Comparaison de la capacité électrostatique d'un condensateur avec la capacité électromagnétique de self-induction d'une bobine.

778. Si deux points d'un circuit, entre lesquels la résistance est R, sont reliés aux électrodes d'un condensateur de capacité C, et qu'une force électromotrice agisse dans le circuit, une partie du courant, au

Fig. 67.



lieu de passer dans la résistance R, est employée à charger le condensateur. Par suite, le courant qui traverse R, partant de zéro, n'atteindra sa valeur finale que d'une manière graduelle. Il résulte de la théorie mathématique qu'une formule exactement de la même nature représente les variations du courant qui traverse R, depuis zéro jusqu'à sa valeur finale, et celles d'un courant émis par une force électromotrice constante à travers la bobine d'un électro-aimant. On peut donc placer dans les branches opposées d'un pont de Wheatstone un condensateur et un électro-aimant, de telle sorte que le courant du galvanomètre reste nul, même au moment où l'on ouvre ou l'on ferme le circuit de pile.

Soient, dans la figure, P, Q, R, S les résistances respectives des quatre branches d'un pont de Wheatstone. Plaçons dans la branche AH, dont la résistance est Q, une bobine dont le coefficient de self-induction est L, et relions aux points P et z, par des pièces de faible résistance, les électrodes d'un condensateur de capacité C. Pour plus de simplicité, supposons qu'il n'y a point de courant dans le galvanomètre G, dont les électrodes sont reliées à F et à H. Nous devons donc déterminer la condition pour que le potentiel de F soit égal à celui de H. Et c'est seulement quand nous voudrons apprécier la sensibilité de la méthode que nous aurons besoin de calculer le courant qui traverse le galvanomètre quand cette condition n'est pas remplie.

Soient x la quantité totale d'électricité qui a traversé la branche AF; z celle qui a traversé la branche Fz, au temps t. La charge du condensateur sera $x - z$. La force électromotrice qui agit entre les armatures du condensateur est, d'après la loi de Ohm, $R\frac{dz}{dt}$; si donc la capacité du condensateur est C,

$$x - z = RC\frac{dz}{dt}. \tag{1}$$

Soit y la quantité totale d'électricité qui a traversé la branche AH; la force électromotrice qui agit de A vers H doit être égale à celle qui agit de A vers F, ou

$$Q\frac{dy}{dt} + L\frac{d^2y}{dt^2} = P\frac{dx}{dt}. \tag{2}$$

Puisqu'il n'y a point de courant dans le galvanomètre, la quantité qui traverse Hz doit aussi être y, et nous trouvons

$$S\frac{dy}{dt} = R\frac{dz}{dt}. \tag{3}$$

Substituant dans (2) la valeur de x tirée de (1) et comparant à (3), nous trouvons que la condition pour qu'il ne passe point de courant dans le galvanomètre est

$$RQ\left(1 + \frac{L}{Q}\frac{d}{dt}\right)z = SP\left(1 + RC\frac{d}{dt}\right)z. \tag{4}$$

La condition pour qu'en régime permanent il n'y ait point de courant est, comme dans un pont de Wheatstone ordinaire,

$$QR = SP. \tag{5}$$

Pour qu'il n'y ait point de courant quand on ouvre ou qu'on ferme la communication de pile, il faut, en outre,

$$\frac{L}{Q} = RC. \tag{6}$$

Ici, $\frac{L}{Q}$ et RC sont les constantes relatives au temps des branches Q et R, et si, en faisant varier Q et R, on peut régler les branches du pont de Wheatstone, de façon que le galvanomètre n'accuse de courant ni quand on ouvre, ni quand on ferme le circuit, ni quand on maintient le courant, on sait que la constante de temps de la bobine est égale à celle du condensateur.

Le coefficient de self-induction L peut être déterminé en mesure électromagnétique, par comparaison avec le coefficient d'induction mutuelle de deux circuits dont on connaît les éléments géométriques (§ 756). C'est une quantité de la dimension d'une ligne.

La capacité du condensateur peut se déterminer, en mesure électrostatique, par comparaison avec un condensateur dont on connaît les éléments géométriques (§ 229). Cette quantité est aussi une longueur c. La mesure électromagnétique de la capacité est

$$C = c\frac{1}{v^2}. \tag{7}$$

Substituant cette valeur dans l'équation (6), nous avons pour valeur de v^2

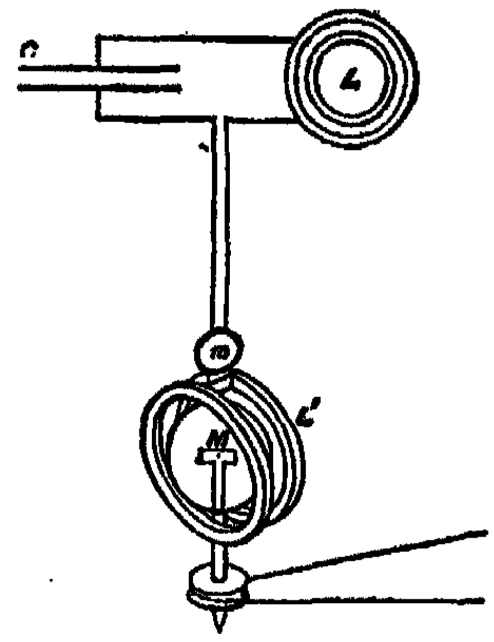
$$v^2 = \frac{cQR}{L}, \tag{8}$$

où c est la capacité du condensateur en mesure électromagnétique; L est le coefficient de self-induction de la bobine en mesure électromagnétique; Q et R sont des résistances en mesure électromagnétique. La valeur de v, déterminée par cette méthode, dépend, comme dans la seconde méthode, de la détermination de l'unité de résistance (§ 772, 773).

V. — Combinaison de la capacité électrostatique d'un condensateur avec la capacité électromagnétique de self-induction d'une bobine.

779. Soit C la capacité d'un condensateur dont les armatures sont reliées par un fil de résistance R comprenant les deux bobines L et L', et soit L la somme de leurs capacités de self-induction. La bobine L′ est suspendue par une suspension bifilaire, et est formée de deux bobines à plans verticaux; entre elles passe un axe vertical portant un aimant M dont l'axe décrit un plan horizontal entre les bobines L et L′ (*fig.* 68). La bobine L a un coefficient de self-induction considé-

Fig. 68.



rable; elle est fixe. On protège la bobine suspendue L′ contre les courants d'air causés par la rotation de l'aimant, en renfermant les pièces mobiles dans une boîte creuse.

Le mouvement de l'aimant induit des courants dans la bobine; ceux-ci sont influencés par l'aimant, de telle sorte que le plan de la bobine suspendue est dévié dans le sens de la rotation de l'aimant. Déterminons l'intensité de ces courants induits et la grandeur de la déviation de la bobine suspendue.

Soit x la charge de l'armature supérieure du condensateur. Si E est la force électromotrice qui produit cette charge, on doit avoir, par la théorie du condensateur,

$$x = \mathrm{CE}. \tag{1}$$

On a aussi, par la théorie des courants électriques,

$$\mathrm{R}\dot{x} + \frac{d}{dt}(\mathrm{L}\dot{x} + \mathrm{M}\cos\theta) + \mathrm{E} = 0, \tag{2}$$

où M est la quantité de mouvement électromagnétique du circuit L′ lorsque l'axe de l'aimant est normal au plan de la bobine, et θ est l'angle entre l'axe de l'aimant et cette normale.

L'équation qui détermine x est donc

$$(3)\qquad CL\frac{d^2x}{dt^2}+CR\frac{dx}{dt}+x=CM\sin\theta\frac{d\theta}{dt}.$$

Si la bobine est dans une position d'équilibre et si la rotation de l'aimant s'effectue avec une vitesse angulaire uniforme n,

$$(4)\qquad \theta=nt.$$

L'expression du courant est formée de deux parties : l'une est indépendante du second membre de l'équation et diminue suivant une fonction exponentielle du temps; l'autre, que l'on peut appeler le *courant forcé*, dépend entièrement du terme en θ et peut s'écrire

$$(5)\qquad x=A\sin\theta+B\cos\theta.$$

On trouve les valeurs de A et B en substituant dans l'équation (3), et l'on obtient

$$(6)\qquad x=-MCn\frac{RCn\cos\theta-(1-CLn^2)\sin\theta}{R^2C^2n^2+(1-CLn^2)^2}.$$

Le moment de la force avec laquelle l'aimant agit sur la bobine L', traversée par le courant $\dot{x}$, est de sens inverse à celui qui agirait sur l'aimant, la bobine étant supposée fixe; il est donc donné par

$$(7)\qquad \Theta=-\dot{x}\frac{d}{d\theta}(M\cos\theta)=M\sin\theta\frac{dx}{dt}.$$

Intégrant cette expression par rapport à t pour la durée d'une révolution et divisant par cette durée, nous trouvons, pour valeur moyenne de Θ,

$$(8)\qquad \bar{\Theta}=-\frac{1}{2}\frac{M^2RC^2n^3}{R^2C^2n^2+(1-CLn^2)^2}.$$

Si la bobine a un moment d'inertie considérable, ses oscillations forcées seront très petites, et sa déviation moyenne sera proportionnelle à $\bar{\Theta}$.

Soient D_1, D_2, D_3 les déviations observées pour les vitesses angulaires n_1, n_2, n_3 de l'aimant; alors on a, en général,

$$(9)\qquad P\frac{n}{D}=\left(\frac{1}{n}-CLn\right)^2+R^2C^2,$$

où P est constant.

Éliminant P et R entre trois équations de cette forme, on trouve

$$(10)\qquad C^2L^2 = \frac{1}{n_1^2 n_2^2 n_3^2}\,\frac{\dfrac{n_1^2}{D_1}(n_2^2-n_3^2)+\dfrac{n_2^2}{D_2}(n_3^2-n_1^2)+\dfrac{n_3^2}{D_3}(n_1^2-n_2^2)}{\dfrac{n_1}{D_1}(n_2^2-n_3^2)+\dfrac{n_2}{D_2}(n_3^2-n_1^2)+\dfrac{n_3}{D_3}(n_1^2-n_2^2)}.$$

Si n_2 est tel que $CLn_2^2=1$, la valeur de $\frac{n}{D}$ sera minimum pour cette valeur de n. On prendra les autres valeurs de n, l'une plus grande, l'autre plus petite que n_2.

La valeur de CL, tirée de cette équation, a pour dimensions le carré d'un temps. Appelons-la τ^2.

Si C_s est la mesure électrostatique de la capacité du condensateur et si L_m est la mesure électromagnétique de la self-induction de la bobine, C_s et L_m sont des lignes, et le produit

$$(11)\qquad C_s L_m = v^2 C_s L_s = v^2 C_m L_m = v^2\tau^2$$

et

$$(12)\qquad v^2 = \frac{C_s L_m}{\tau^2},$$

où τ^2 est la valeur de C^2L^2 trouvée par l'expérience. L'expérience que l'on propose ici, comme méthode pour la détermination de v, est de la même nature que celle décrite par sir W.-R. Grove (*Phil. Mag.*, mars 1868, p. 184). *Voir* aussi les remarques de l'auteur, sur cette expérience, dans le numéro de mai 1868.

VI. — Mesure électrostatique de la résistance. (*Voir* § 355.)

780. Déchargeons un condensateur de capacité C à travers un conducteur de résistance R; si x est à chaque instant la charge,

$$(1)\qquad \frac{x}{C} + R\frac{dx}{dt} = 0,$$

d'où

$$(2)\qquad x = x_0 e^{-\frac{t}{RC}}.$$

Si, par une méthode quelconque, on peut donner des contacts de durée très courte et exactement connue, de façon que le courant traverse le conducteur pendant le temps t, et si E_0 et E_1 sont les lectures d'un électromètre relié au condensateur avant et après l'opération,

$$(3)\qquad RC(\log_e E_0 - \log_e E_1) = t.$$

Si l'on connaît C, en mesure électrostatique, comme quantité linéaire, R peut être déduit de cette expression, en mesure électrostatique, comme l'inverse d'une vitesse.

Si R_s est la valeur numérique ainsi déterminée de la résistance et R_m la valeur numérique en mesure électromagnétique,

$$v^2 = \frac{R_m}{R_s}. \tag{4}$$

Comme il est nécessaire pour cette expérience que R soit très grand, et que R doit être petit dans les expériences électromagnétiques des § 763 et suivants, les expériences doivent être faites sur des conducteurs différents, dont les résistances sont comparées par les méthodes ordinaires.