COLLECTION

DE

MÉMOIRES

RELATIFS A LA

PHYSIQUE,

PUBLIÉS PAR

LA SOCIÉTÉ FRANÇAISE DE PHYSIQUE.

TOME II.

—

MÉMOIRES SUR L'ÉLECTRODYNAMIQUE.

PREMIÈRE PARTIE.

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

Quai des Augustins, 55.

—

1885

Source gallica.bnf.fr / Bibliothèque nationale de France

VII.

MÉMOIRE SUR L'EXPRESSION MATHÉMATIQUE DES ATTRACTIONS ET DES RÉPULSIONS DES COURANTS ÉLECTRIQUES:

PAR M.-A. AMPÈRE [1].

§ I. — De l'attraction et de la répulsion entre deux courants parallèles.

Le but que je me suis proposé, dans le travail dont je vais exposer les résultats, est de rendre raison de tous les faits relatifs soit à l'action mutuelle de deux aimants, soit à celle d'un conducteur voltaïque et d'un aimant, découverte par M. Œrsted, soit à celle de deux conducteurs, que j'ai observée le premier, et de les ramener à une seule loi, en admettant uniquement, entre les portions infiniment petites de ce que j'ai nommé *courants électriques,* des forces dirigées suivant la ligne qui joint leurs milieux, ne pensant pas qu'on puisse admettre entre elles, de quelque nature qu'elles soient, aucune sorte d'action dans une autre direction. J'ai admis que cette action n'était pas seulement fonction de la distance, mais qu'elle dépendait aussi des angles qui déterminent la position respective de deux portions infiniment petites de courants électriques et de la ligne qui en joint les milieux. Cette supposition ne semble pas d'abord conforme à l'idée qu'on se forme des forces attractives et répulsives, parce que l'attraction universelle, premier type de cette idée, ne dépendant que de la distance, nous ne sommes pas encore accoutumés à faire entrer d'autres éléments; mais c'est uniquement par elles qu'on peut représenter les phénomènes, et elle s'accorde si bien avec les différentes circonstances qu'ils présentent et les valeurs obtenues pour celles de ces actions qui ont été mesurées, qu'il me semble

[1] Mémoire lu à l'Académie royale des Sciences, le 4 décembre 1820; publié, pour la première fois, d'après le manuscrit autographe des Archives de l'Académie des Sciences. (J.)

que, si l'on trouve un jour une autre loi plus générale et plus simple qui rende raison de ces phénomènes, ce ne sera que parce que cette loi donne d'abord pour premier résultat celle à laquelle je les ai ramenés.

La manière dont la distance y entre est celle que j'avais annoncée, comme base de toutes mes recherches, dans le Mémoire que j'eus l'honneur de lire à l'Académie le 9 octobre dernier ([1]). Non seulement la force que j'admets entre deux portions infiniment petites de courants électriques est dirigée suivant la ligne qui en joint les milieux, mais elle se rapproche encore des lois d'attraction et de répulsion observées dans d'autres phénomènes en ce que, pour une même position respective des deux portions de courants que l'on considère, elle est en raison inverse du carré de la distance. Le premier résultat que j'en ai déduit, par une intégration fort simple, est que, dans le cas de deux courants rectilignes dont les directions sont parallèles, si l'on suppose un des courants de longueur infinie, la résultante des actions de toutes ses parties sur un élément de l'autre, et, par conséquent aussi sur l'une de ses portions d'une longueur déterminée, est en raison inverse de la plus courte distance des deux courants.

Je crois devoir faire, à ce sujet, deux observations.

La première est que le résultat est indépendant de la manière dont [entre dans la formule] l'angle que forment deux portions infiniment petites de courants parallèles avec la ligne qui en joint les milieux, seul angle qui, dans ce cas, peut entrer dans la valeur de leur attraction mutuelle, parce que, si l'on nomme a la perpendiculaire abaissée du milieu de la portion de courant qu'on suppose attirée ou repoussée par celui auquel on assigne une longueur infinie, x la distance mesurée sur la direction de ce dernier, depuis le pied de cette perpendiculaire jusqu'à un de ses éléments, dont la longueur est alors représentée par dx, on trouvera que [les quantités] a, x, dx entrent nécessairement dans la valeur de l'attraction ou de la répulsion de la manière suivante :

1° Si k représente l'intensité de cette action à la distance 1 lorsque les deux petits courants sont perpendiculaires à la ligne

([1]) *Voir*, pages 26 et suivantes, un résumé de cette lecture. (J.)

qui en joint les milieux, $\frac{k}{a^2+x^2}$ la représenterait à la distance $\sqrt{a^2+x^2}$ où se trouvent les deux portions de courants que l'on considère, si la même condition avait lieu, ce qui n'est pas dans le cas présent.

2° Dans celui qui a lieu ici, cette intensité devra être multipliée par une fonction de l'angle dont nous venons de parler et dont la tangente est $\frac{a}{x}$; ce sera donc par une fonction $f\left(\frac{a}{x}\right)$ de $\frac{a}{x}$; et, en général, toute fonction qui ne dépend que d'un angle, étant de dimension nulle, peut être ramenée à $f\left(\frac{x}{a}\right)$, quand l'angle ne dépend que deux lignes a et x.

3° Si l'on fait varier la longueur de l'élément dx, l'attraction ou la répulsion augmenteront ou diminueront dans le même rapport que dx, parce que les différentes parties dont on peut supposer que dx est composé sont prises dans la même direction et à la même distance de la portion de l'autre courant que l'on considère, à des différences infiniment petites près, qu'il faut supprimer dans le calcul. Il faudra donc représenter l'intensité k de l'action attractive ou répulsive à la distance 1, par le produit d'une quantité constante g par dx, et l'expression de l'action cherchée sera

$$\frac{gf\left(\frac{a}{x}\right)}{a^2+x^2}\,dx.$$

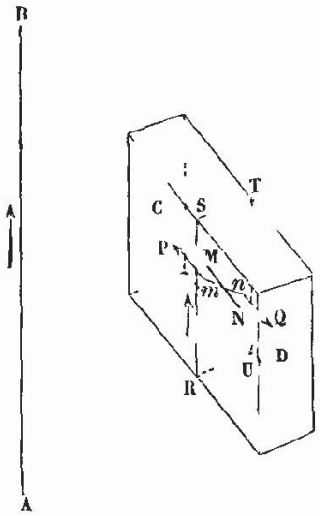
Le nombre des dimensions de a et de x dans la quantité qui multiplie dx se trouve ainsi -2, et la dimension de l'intégrale, par rapport aux mêmes quantités a et x, sera, par conséquent, -1. Par quelque procédé qu'on obtienne cette intégrale, il faudra la prendre depuis $x=0$ jusqu'à $x=\frac{1}{0}$, ce qui fera disparaître x, et il restera une fonction de a, dont la dimension sera -1, c'est-à-dire une constante divisée par a. Cette constante dépendra de l'intensité k de l'attraction ou de la répulsion à la distance 1, et d'un coefficient numérique qui sera différent, suivant la manière dont l'action exercée dépendra de l'angle de la direction des courants avec la ligne qui en joint les milieux; mais, quelle que soit sa valeur, celle de l'intégrale définie qui exprime cette action sera en raison inverse de a.

Ce rapport, une fois démontré pour l'action exercée sur une portion infiniment petite de courant électrique, a lieu nécessairement pour un courant rectiligne d'une grandeur finie, parallèle à celui qu'on regarde comme d'une longueur infinie et dont on veut déterminer l'action.

Cette loi était donc une suite nécessaire de ce que j'avais lu, le 9 octobre, à l'Académie; il n'en était pas moins important de la vérifier par des mesures précises; c'est ce qu'a fait M. Biot, par un moyen aussi exact qu'ingénieux; mais il a supposé que la force émanée du conducteur électrique qu'il faisait agir sur un petit aimant s'exerçait dans un sens perpendiculaire au rayon vecteur, et j'admets qu'elle agit dans la direction de ce rayon; cependant les effets qui résultent de ces deux manières, en apparence si différentes, de concevoir cette force, sont absolument les mêmes et conformes à l'expérience : c'est ce qu'il me reste à expliquer.

Soient AB un fil conducteur vertical (*fig.* 1) où je suppose le courant ascendant, DC un petit barreau aimanté de forme paral-

Fig. 1.



lélépipédique, dont le pôle nord soit en C; M. Biot, n'ayant pas admis l'identité des fluides électriques et magnétiques, continue de supposer des particules de fluide boréal et de fluide austral, placées deux à deux, une de chaque sorte, sur de petites droites, telles que MN parallèles à l'axe de l'aimant, et c'est sur ces molécules qu'il suppose qu'agissent les forces attractives et répulsives du conducteur AB.

Puisque l'aimant reste stable dans la direction perpendiculaire au plan qui passe par son milieu et par la direction de ce conducteur, il faut que, quand MN prend une position infiniment voisine *mn*, les forces P et Q, qui étaient supposées agir sur les points M et N, dans deux directions opposées, suivant les prolongements de MN, agissent parallèlement à la première situation de cette ligne, et, par conséquent, perpendiculairement au plan qui passe par le milieu de MN, où se trouvent tous les rayons vecteurs.

Mais, après avoir établi l'identité de l'électricité et du magnétisme par les expériences que j'ai faites, le 9 octobre, devant l'Académie, en remplaçant tantôt un des courants électriques que j'avais d'abord fait agir l'un sur l'autre, tantôt tous les deux, par des aimants placés comme ils doivent l'être pour que la disposition de l'électricité que j'y admets fût la même que dans le courant que remplaçait l'aimant, et en montrant que les actions restent les mêmes dans ce changement, j'ai dû considérer l'action attractive du courant du fil conducteur AB sur la portion RS d'un des courants de l'aimant qui lui est parallèle et dirigé dans le même sens, et son action répulsive sur la portion TU du même courant qui lui est aussi parallèle et dirigée en sens contraire, et m'appuyant sur ce que j'ai établi directement par les expériences sur l'action mutuelle de deux fils conducteurs, sans l'intermède d'aucun aimant, qu'il devait y avoir effectivement attraction dans ce premier cas et répulsion dans le second, j'ai vu que, pour maintenir l'aimant dans la situation où l'expérience prouve qu'il est amené par le fil conducteur, il fallait que les forces qui en émanent fussent dans le plan RSTU, perpendiculaire à l'axe de l'aimant, dans la situation où il se fixe après avoir oscillé quand on l'en détourne. Or ce plan est précisément celui qui passe par le courant de l'aimant et le fil conducteur, s'il n'y a qu'un courant, et le plan moyen entre tous ceux qui sont dans le même cas, relativement à chaque courant de l'aimant qui en contient nécessairement sur toute sa longueur.

Lorsque l'aimant est infiniment peu détourné de sa première position, les forces X et Y, qui agissaient sur les portions de courant RS, TU, se trouvent agir sur les directions sensiblement parallèles qu'elles ont dans la figure, et leur moment pour

ramener le barreau aimanté à sa première position est dans le même sens que dans la supposition qu'a préférée M. Biot, et proportionnelle de même au sinus de l'angle de déviation, c'est-à-dire à cet angle même, puisqu'on le suppose très petit. Je n'ai pas besoin d'ajouter qu'en partant de la théorie de ces phénomènes, fondée sur l'identité de l'électricité et du magnétisme, l'action du courant du fil conducteur AB est nulle sur les deux portions de courant ST, UR, qui sont horizontales, car les attractions et les répulsions de toutes les petites portions des conducteurs se compensent nécessairement dans ces directions.

La théorie qui ramène tous les phénomènes de l'aimant à ceux qu'offre l'électricité, quand on fait agir deux courants l'un sur l'autre, théorie appuyée d'ailleurs sur bien d'autres faits, a, à l'égard des phénomènes dont nous nous occupons, ces deux avantages :

1° De ne pas faire agir le fil conducteur AB sur des particules magnétiques dont rien ne démontre l'existence, et qui sont une supposition gratuite, mais sur des dispositions de l'électricité suivant les lignes RS, TU, semblables à celles qu'on établit dans un fil de laiton, et se conduisent précisément de la même manière que le fait cette dernière dans les expériences où il n'y a point d'aimants;

2° De n'admettre que des forces attractives ou répulsives entre deux points que suivant la ligne qui joint ces deux points.

Il me reste à montrer, par des résultats précis de calcul, fondés sur cette théorie, que les actions mutuelles entre les courants électriques de deux aimants produisent tous les mêmes phénomènes qui suivent de la supposition des deux fluides magnétiques, l'un austral, l'autre boréal, qu'elles s'accordent même mieux avec quelques circonstances de ces phénomènes, qu'on avait négligées parce qu'elles ne concordaient peut-être pas assez bien avec l'hypothèse adoptée. Ce sera le sujet d'un autre Mémoire; je me bornerai dans celui-ci à indiquer comment j'ai trouvé l'expression mathématique de l'action de deux courants, ou plutôt la manière dont y entrent les angles qui déterminent, en général, la position respective de deux petites lignes dans l'espace. Je me suis d'abord assuré, par l'emploi des formules ordinaires de la Trigonométrie sphérique, qu'il y avait deux fonctions des sinus et des cosinus

de ces angles qui s'accordaient avec la loi [1] que j'ai communiquée à l'Académie, dans la séance du 6 novembre, et que j'avais vérifiée exactement sur des fils conducteurs pliés en hélices. Les calculs qui m'ont donné ces deux fonctions sont contenus dans la Note qui fait suite à ce Mémoire [2].

La somme des produits de ces fonctions, multipliées par des constantes arbitraires, satisfaisait par conséquent aussi à cette loi. Ces deux fonctions étaient de plus symétriques, relativement aux deux petites lignes, ce qui était évidemment une condition indispensable.

Les angles dont il est ici question sont, en général, au nombre de trois. Nommons α l'angle formé par une de ces lignes avec celle qui en joint le milieu à celui de l'autre, β l'angle correspondant relativement à cette dernière, et γ l'angle formé par les deux plans qui passent par chacune des petites lignes et par la droite qui joint leurs milieux. Alors une des deux fonctions, dont je viens de parler, sera $\cos\alpha\cos\beta$, l'autre $\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma$; car il est aisé de voir que $\sin\alpha\sin\beta$ ne peut satisfaire à la loi citée plus haut si ce produit n'est pas multiplié par $\cos\gamma$; m et n étant deux nombres, on aura la formule

$$m\cos\alpha\cos\beta + n\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma,$$

qui paraît comprendre toutes les formules qui y satisfont. Si $m = n$, cette valeur devient

$$m(\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta\cos\gamma),$$

qui se réduit à $m\cos h$, en nommant h l'angle des directions des deux lignes. Dans ce cas, l'action ne varierait pas lorsque, sans changer la distance des deux petites lignes, on en transporterait une parallèlement à elle-même autour de l'autre; mais alors il n'y aurait point d'action entre deux courants dont les directions formeraient un angle droit, ce qui est contraire à l'expérience.

J'ai calculé les effets produits en supposant dans cette formule

---

[1] *Loi des courants sinueux.* L'énoncé de cette loi a été donné plus haut, art. II, p. 23. (J.)

[2] La substance de cette Note a été insérée, avec quelques nouveaux développements, dans le cahier de septembre du *Journal de Physique.* (A.)

Nous ne la reproduisons pas ici pour ne pas faire double emploi avec les développements donnés plus loin dans l'article XXVII et qui sont presque identiques. (J.)

d'abord $m = 0$, puis $n = 0$, afin d'avoir, en ajoutant les résultats, des valeurs des intégrales pour toutes les valeurs positives de m et de n. Ces calculs donnent, dans les deux cas, l'attraction d'un courant infini, en raison inverse de la distance, comme cela ne pouvait manquer d'arriver, d'après ce que j'ai dit ci-dessus. Ce cas n'est donc pas propre à éclaircir la question relativement aux valeurs numériques de m et de n; il est bien probable que n est très petit relativement à m, d'après les résultats généraux de l'expérience, ou plutôt que ce coefficient n est absolument nul, et que, comme je le crois et l'ai annoncé lundi dernier à un des Membres de l'Académie, la valeur de l'attraction ou de la répulsion entre deux portions infiniment petites dx, dz de courants électriques est exprimée simplement par la formule

$$\frac{k\,dx\,dz \sin\alpha \sin\beta \cos\gamma}{r^2},$$

en nommant r leur distance. L'analogie de cette formule et de celle qu'on obtiendrait en faisant au contraire $n = 0$ avec la formule qui exprime le coefficient du changement de température, lorsque deux petites surfaces sont exposées chacune à la chaleur rayonnante de l'autre, me paraît très digne de remarque; mais je n'en parlerai pas ici, pensant que j'aurai bientôt l'occasion de revenir sur ce sujet [1].

---

[1] La supposition de $n = 0$ a, on peut le dire, dérouté Ampère jusqu'au milieu de l'année 1822. Elle l'avait conduit à un théorème inexact, dont on trouve l'énoncé dans les *Memoires de l'Academie des Sciences*, t. IV, p. CXLVIII, et à quelques autres consequences, également erronées, renfermees dans les nos 31-43 de l'*Exposé des nouvelles decouvertes sur le Magnetisme et l'Électricité*, par Babinet (et Ampère), publié dans le cinquième Volume de la traduction du *Système de Chimie de Thomson* par RIFFAULT (1822).

Dans une série de Mémoires lus à l'Académie, les 11 et 26 décembre 1820 et les 8 et 15 janvier 1821, Ampère avait essayé de calculer, avec la formule ainsi simplifiée, les expériences de Biot et Savart, soit dans le cas du fil rectiligne, soit dans le cas du fil oblique, et n'était arrivé nécessairement qu'à des résultats inexacts et incomplets. Ces Mémoires, dont les originaux existent dans les Archives de l'Académie, n'ont jamais été publiés : une analyse en a été donnée dans un article, sans nom d'auteur, inséré dans le tome V des *Annales des Mines*, p. 535-558, et réimprimé dans son *Recueil d'Observations*, etc., p. 69-90. (J.)