CORRESPONDANCE

MATHÉMATIQUE ET PHYSIQUE

DE

L'OBSERVATOIRE DE BRUXELLES

PUBLIÉE

PAR A. QUETELET,

Directeur de l'observatoire de Bruxelles; professeur au musée; membre de l'académie des sciences et belles-lettres, et de l'institut des Pays-Bas; associé libre étranger de la société de statistique de Paris, de la société philomathique de la même ville, de la société royale astronomique de Londres, des académies royales de Berlin et de Turin; des sociétés des sciences naturelles et médicales de Heidelberg et de Wurzbourg; des sociétés de Gand, Liége, Rotterdam, La Haye, Utrecht, Cambrai.

—

TOME QUATRIÈME.

BRUXELLES.

SOCIÉTÉ BELGE DE LIBRAIRIE

HAUMAN ET Cᵉ.

—

1838

Digitized by Google

que possible. Outre les chiffres d'observation, on devra joindre dans les envois l'annotation des autres circonstances qui s'y rattacheront, telles que la valeur des divisions de l'échelle (ou les mesurages sur lesquels repose la détermination), la durée d'oscillation, la position et la marche de l'horloge, les noms des observateurs, des éclaircissemens sur celles des observations qui pourraient paraître douteuses, etc. Il n'est point nécessaire de dire que les communications devront être faites le plus promptement possible. »

(Dans un prochain numéro de la *Correspondance* nous ferons connaître les principaux résultats auxquels ont conduit les recherches qui viennent d'être indiquées.)

Nouvelle discussion de l'équation générale des courbes du second degré. Fragment, par M. Ampère [1].

Quand une courbe rapportée à deux axes quelconques, obliques ou rectangulaires, est donnée par une équation dans laquelle les coordonnées x et y entrent symétriquement, c'est-à-dire puissent être permutées sans que l'équation cesse d'exister, cette courbe se compose de deux portions égales et semblables symétriquement placées de part et d'autre de la droite AG, *fig.* 1, qui divise l'angle YAX en deux parties égales. En effet, si, dans ce cas, l'équation de la courbe est vérifiée par deux valeurs $x = a$, $y = b$, ou s'il y a un point M de la courbe qui ait pour coordonnées $x = \mathrm{AP} = a$, $y = \mathrm{PM} = b$, il y aura un autre point M′ qui aura pour coordonnées $x = \mathrm{MP} = \mathrm{AP}' = \mathrm{AQ} = b$, $y = \mathrm{AP} = \mathrm{M'P'} = \mathrm{AQ}' = a$. Or, si l'on divise l'angle YAX en deux

---

[1]) L'article que nous présentons ici se trouvait parmi les notes manuscrites qui nous ont été remises par M. *Ampère*, quelque temps avant sa mort (*voyez* pag. 144, t. IX de la *Correspondance Math.*

Digitized by Google

parties égales par la droite AG, et qu'on replie la figure autour de cette droite; à cause de l'égalité des lignes AP′ et AG, P′M′ et QM, et des angles AP′M′ et AQM, P′AG et GAQ, le point M′ tombera sur le point M; la ligne MM′ sera perpendiculaire à la ligne AG, et les deux points M,M′ ainsi que tous les autres points de la courbe, seront deux à deux sur des droites perpendiculaires à la ligne AG et à égale distance de cette droite.

Lorsque dans une équation, il y a des termes non symétriques, parce que les coefficiens de deux termes qui le seraient sans cela, sont différens, on peut faire disparaître cette asymétrie de deux manières, soit en faisant évanouir ces deux termes, soit en rendant leurs coefficiens égaux par la même transformation qui aurait servi à les faire évanouir, quand cela n'est pas possible, parce qu'on serait conduit à des résultats infinis ou imaginaires. En changeant l'origine et la direction des axes, l'on a quatre indéterminées dont on peut se servir pour faire disparaître ou rendre symétriques les termes qui ne le sont pas.

Soit, entre des coordonnées rectangulaires, l'équation générale du second degré

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F = o \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

A étant positif. Si cette équation était donnée entre des axes obliques faisant un angle θ, on commencerait par les rendre rectangulaires, en posant

$$y = \frac{y'}{\sin.\theta}, x = x' - \frac{y' \cos.\theta}{\sin.\theta}, \textit{fig.}\ 2.$$

Si A n'était pas positif, on changerait tous les signes.

L'équation (1) a deux termes symétriques Bxy et F, et quatre asymétriques Ay^2, Cx^2, By et Ex. Le cas le plus favorable est celui où ces derniers termes peuvent s'évanouir tous les quatre : ce qui donne quatre conditions qui déterminent les coordonnées a, b de la nouvelle origine et les angles α et α' relatifs à la direction des nouveaux axes. Quand les termes asymétriques du premier degré peuvent s'évanouir, mais non ceux du second; en

Digitized by Google

les faisant disparaître, on a les mêmes valeurs de a et de b; puis, on a une relation entre α' et α qui rend symétriques les termes du second degré; et comme cela ne donne qu'une condition, on peut encore faire évanouir un des deux termes symétriques pour simplifier l'équation. Enfin, quand on ne peut rendre nuls ni les termes asymétriques du premier degré, ni ceux du second, on les rend symétriques : ce qui ne fournit que trois conditions; l'angle $\alpha' - \alpha$ des nouveaux axes reste arbitraire, et l'équation réduite a lieu pour une infinité de systèmes d'axes qui donnent tous identiquement la même courbe. Les trois cas dont nous venons de parler répondent aux trois espèces de courbes du second degré, et conduisent pour chacune à la forme d'équation la plus simple et surtout à celle qui donne le mode le plus facile de description par points.

Reprenons l'équation (1) et faisons $x = x' + a$, $y = y' + b$; ce qui transportera l'origine au point $(x = a, y = b)$; en substituant on trouve

$$\left.\begin{array}{l|l|l} Ay'^2 + Bx'y' + Cx'^2 & + 2Ab & y' + Bb \quad x' + Ab^2 \\ & + Ba & \quad + 2Ca \quad + Bab \\ & + D & \quad + E \quad + Ca^2 \\ & & \quad + Db \\ & & \quad + Ea \\ & & \quad + F \end{array}\right\} = o \quad (2)$$

Pour faire disparaître les termes asymétriques qui renferment y' et x' à la première puissance, il faut poser

$$\left.\begin{array}{l} 2Ab + Ba + D = o, \\ Bb + 2Ca + E = o; \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

d'où

$$\left.\begin{array}{l} a = \dfrac{2AE - BD}{B^2 - 4AC}, \\ b = \dfrac{2CD - BE}{B^2 - 4AC}; \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Cette transformation sera impossible si $B^2 - 4AC = o$; dans tout

Digitized by Google

autre cas, la courbe se trouve ramenée à la forme

$$Ay'^2 + Bx'y' + Cx'^2 + F' = o \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

L'on peut calculer facilement F' : en effet, si nous multiplions la première des équations (3) par b et la seconde par a, et que nous les ajoutions, nous aurons

$$Ab^2 + Bab + Ca^2 = -\frac{Db + Ea}{2},$$

ou

$$Ab^2 + Bab + Ca^2 + Db + Ea = \frac{Db + Ea}{2};$$

les deux équations (4) donnent

$$\frac{Db + Ea}{2} = \frac{CD^2 + AE^2 - BED}{B^2 - 4AC};$$

donc enfin

$$F' = F + \frac{CD^2 + AE^2 - BDE}{B^2 - 4AC}.$$

Changeons maintenant la direction des axes au moyen des formules connues,

$$y' = y'' \sin. \alpha' + x'' \sin. \alpha,$$
$$x' = y'' \cos. \alpha' + x'' \cos. \alpha;$$

l'équation (5) devient alors :

$$\left.\begin{array}{l} A\sin.^2\alpha' \\ +B\sin.\alpha'\cos.\alpha' \\ +C\cos.^2\alpha' \end{array}\right| \begin{array}{l} y''^2 + 2A\sin.\alpha\ \sin.\alpha' \\ \quad + B\sin.\alpha\ \cos.\alpha' \\ \quad + B\sin.\alpha'\cos.\alpha \\ \quad + 2C\cos.\alpha'\cos.\alpha \end{array} \Bigg| \begin{array}{l} x''y'' + A\sin.^2\alpha \\ \quad + B\sin.\alpha\cos.\alpha \\ \quad + C\cos.^2\alpha \end{array} \Bigg| x''^2 + F' \Bigg\} = o. \quad (6)$$

Pour faire disparaître y''^2 et x''^2, il faut poser

$$\left.\begin{array}{l} A\sin.^2\alpha' + B\sin.\alpha'\cos.\alpha' + C\cos.^2\alpha' = o, \\ A\sin.^2\alpha + B\sin.\alpha\ \cos.\alpha + C\cos.^2\alpha = o; \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad (7)$$

ou bien

$$A\ \text{tang.}^2\alpha' + B\ \text{tang.}\alpha' + C = o,$$
$$A\ \text{tang.}^2\alpha + B\ \text{tang.}\alpha + C = o;$$

Digitized by Google

de sorte que α et α' sont les deux racines de l'équation

$$m^2 + \frac{B}{A}m + \frac{C}{A} = o\,;$$

d'où

$$\text{tang. } \alpha' + \text{tang. } \alpha = -\frac{A}{B}, \quad \text{tang. } \alpha' \text{ tang. } \alpha = \frac{C}{A}\,;$$

de plus, comme les deux racines de cette équation

$$m = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}$$

ne seront réelles qu'autant que $B^2 - 4AC$ sera positif et plus grand que zéro, ce n'est que dans ce dernier cas que la transformation dont nous parlons, pourra s'effectuer et que l'on réduira l'équation (1) à la forme

$$B'xy + F' = o. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

On peut déterminer graphiquement la position des nouveaux axes. En effet, soit A′ la nouvelle origine. Prenons sur l'horizontale passant par A′, une longueur $A'K = 2A$ et sur la verticale passant par K une autre longueur $KH = B$, et sur cette même verticale prenons à partir de H deux parties HG, HG′ égales toutes deux à $\sqrt{B^2 - 4AC}$; en menant les droites A′G, A′G′, ce seront les nouveaux axes des x et des y cherchés. Car on a

$$\text{tang. } \alpha = -\text{ tang. } GA'K = \frac{KH + H'G}{A'K} = \frac{-B \mp \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}\,;$$

$$\text{tang. } \alpha' = \frac{G'K}{A'K} = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}.$$

Nous venons de voir que l'équation de la courbe est alors

$$B'xy + F' = o\,, \quad xy = -\frac{F'}{B'}\,;$$

Digitized by Google

mais

$$B' = \cos.\alpha' \cos.\alpha [2A \operatorname{tang.}\alpha \operatorname{tang.}\alpha' + B(\operatorname{tang.}\alpha + \operatorname{tang.}\alpha') + 2C]$$

$$= \cos.\alpha' \cos.\alpha \left(\frac{4AC - B^2}{A}\right);$$

et par conséquent, l'équation de la courbe devient

$$xy = \frac{AF'}{\cos.\alpha' \cos.\alpha (B^2 - 4AC)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

Quant à l'angle des nouveaux axes, on a, en nommant cet angle θ,

$$\operatorname{tang.}\theta = \operatorname{tang.}(\alpha' - \alpha) = \frac{\operatorname{tang.}\alpha' - \operatorname{tang.}\alpha}{1 + \operatorname{tang.}\alpha \operatorname{tang.}\alpha'} = \frac{\pm\sqrt{B^2 - 4AC}}{A + C}.$$

Cette transformation n'est possible, comme nous l'avons déjà vu, qu'autant que $B^2 - 4AC$ est plus grand que zéro; en outre, d'après la construction ci-dessus, cos. α et cos. α' étant de même signe, le produit cos. α' cos. α sera toujours positif; A est positif par hypothèse : par conséquent, dans l'équation (9) de la courbe, le produit des deux coordonnées sera toujours de même signe que F', de sorte que si F' est positif, x, y devront être tous deux de même signe, et la courbe sera composée de deux branches parfaitement égales et symétriques situées dans les angles Y'A'X', Y''A'X''. Si au contraire F' était négatif, x et y devraient être de signes contraires et la courbe serait située symétriquement dans les angles Y'A'X'', Y''A'X'.

Dans l'angle Y'A'X', on devra prendre les deux cosinus positifs, ce qui donnera

$$\cos.\alpha' \cos.\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tang.}^2\alpha'}} \times \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tang.}^2\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tang.}^2\alpha' + \operatorname{tang.}^2\alpha + \operatorname{tang.}^2\alpha \operatorname{tang.}^2\alpha'}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{(\operatorname{tang.}\alpha' \operatorname{tang.}\alpha - 1)^2 + (\operatorname{tang.}\alpha' + \operatorname{tang.}\alpha)^2}} = \frac{A}{\sqrt{(C - A)^2 + B^2}};$$

Digitized by Google

ce qui changera l'équation (9) en

$$xy = \frac{F'\sqrt{(C-A)^2+B^2}}{B^2-4AC} = r^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

valeur absolue, mais dont le signe serait incertain sans le raisonnement précédent. Cette équation se construit aisément, parce que $x = \pm r$, $y = \pm r$, donnent deux points de la courbe, les deux sommets, et qu'on en trouve alors tant d'autres qu'on veut par le procédé connu.

Quand $B^2 - 4AC < o$, ce qui suppose A et C de même signe, il faut recourir à une autre transformation qui consiste à rendre l'équation symétrique, en égalant les coefficiens des carrés x^2 et y^2, et à faire disparaître le terme xy. Pour cela, il faut poser dans l'équation (6),

$$2A \sin.\alpha \sin.\alpha' + B \sin.\alpha \cos.\alpha' + B \sin.\alpha \cos.\alpha' + 2C \cos.\alpha' \cos.\alpha = o,$$

ce qui revient à faire

$$2A \text{ tang. } \alpha \text{ tang. } \alpha' + B(\text{tang. } \alpha + \text{tang. } \alpha') + 2C = o; \quad (11)$$

et de plus, il faut que

$$A \sin.^2\alpha' + B \sin.\alpha' \cos.\alpha' + C \cos.^2\alpha' = G = G \sin.^2\alpha' + G \cos.^2\alpha',$$
$$A \sin.^2\alpha + B \sin.\alpha \cos.\alpha + C \cos.^2\alpha = G = G \sin.^2\alpha' + G \cos.^2\alpha;$$

d'où l'on tire

$$\left.\begin{array}{l}(A-G) \text{ tang.}^2\alpha' + B \text{ tang. } \alpha' + C - G = o, \\ (A-G) \text{ tang.}^2\alpha + B \text{ tang. } \alpha' + C - G = o;\end{array}\right\} \quad . \quad . \quad (12)$$

Ainsi tang. α' et tang. α sont les deux racines de l'équation

$$m^2 + \frac{B}{A-G} m + \frac{C-G}{A-G} = o;$$

d'où

$$\text{tang. } \alpha' + \text{tang. } \alpha = -\frac{B}{A-G}, \quad \text{tang. } \alpha' \text{ tang. } \alpha = \frac{C-G}{A-G};$$

Digitized by Google

ces valeurs étant substituées dans l'équation (11), donnent

$$G = \frac{4AC - B^2}{2(A+C)};$$

et l'équation de la courbe devient alors :

$$G(x^2+y^2) + F' = o,$$

ou

$$x^2+y^2 = -\frac{2F'(A+C)}{4AC-B^2} = r^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

Il est bien facile de la construire, en inclinant les ordonnées du cercle dont le rayon est r, parallèlement aux nouveaux axes.

Ayant construit $G = \frac{4AC-B^2}{2(A+C)}$, on s'en servira : 1° pour construire $r = \sqrt{-\frac{F'}{G}}$, qui ne sera réel que quand

$$F' = F + \frac{CD^2 + AE^2 - BDE}{B^2 - 4AC}$$

sera négatif, c'est-à-dire de signe contraire à A et à C; 2° pour trouver tang. α' et tang. α, en construisant les deux racines de l'équation

$$m^2 + \frac{B}{A-G}m + \frac{C-G}{A-G} = o.$$

Il est bon de remarquer que dans l'ellipse représentée par l'équation (13) comme dans l'hyperbole représentée par l'équation (10),

$$\text{tang.}\,(\alpha'+\alpha) = -\frac{B}{A-C};$$

mais dans la seconde,

$$\text{tang.}\,(\alpha'-\alpha) = \frac{\pm\sqrt{B^2-4AC}}{A+C}$$

$$\cos.\,(\alpha'-\alpha) = \frac{A+C}{\sqrt{(A-C)^2+B^2}}$$

Digitized by Google

et dans la première

$$\text{tang.}(\alpha'-\alpha)=\pm\sqrt{\frac{4AC-B^2}{(A-C)^2+B^2}}$$

$$\cos.(\alpha'-\alpha)=\frac{\sqrt{\overline{A-C}^2+B^2}}{A+C},$$

valeur inverse de celle qui convient à l'hyperbole.

Quand $B^2-4AC=o$, les termes en y' et x' ne peuvent plus s'évanouir à la fois, non plus que les termes en x'^2 et y'^2, parce que l'on aurait tang. $\alpha'=$ tang. α, ce qui ne se peut; voyons dans quel cas on pourrait les rendre symétriques par le simple changement des axes. Reprenons l'équation (1)

$$Ay^2+Bxy+Cx^2+Dy+Ex+F=o;$$

et faisons

$$y=y'\sin.\alpha'+x'\sin.\alpha,$$
$$x=y'\cos.\alpha'+x'\cos.\alpha;$$

cette équation devient alors :

$$\left.\begin{array}{l|l|l|l|l|l}
A\sin^2\alpha' & y'^2+2A\sin.\alpha\sin.\alpha' & x'y'+A\sin.^2\alpha & x'^2+D\sin.\alpha' & y'+D\sin.\alpha & x'+F \\
+B\sin\alpha'\cos.\alpha' & +B\sin.\alpha\cos.\alpha' & +B\sin.\alpha\cos.\alpha & +E\cos.\alpha' & +E\cos.\alpha & \\
+C\cos.^2\alpha' & +B\sin.\alpha'\cos.\alpha & +C\cos.^2\alpha & & & \\
 & +2C\cos.\alpha'\cos.\alpha & & & &
\end{array}\right\}=o;$$

et il faut que l'on ait à la fois

$$\left.\begin{array}{l}
A\sin.^2\alpha'+B\sin.\alpha'\cos.\alpha'+C\cos.^2\alpha'=A\sin.^2\alpha+B\sin.\alpha\cos.\alpha+C\cos.^2\alpha \\
D\sin.\alpha'+E\cos.\alpha'=D\sin.\alpha+E\cos.\alpha;
\end{array}\right\}\ (14).$$

ou bien, puisque $B^2-4AC=o$,

$$\left.\begin{array}{l}
A\sin.\alpha'+\frac{B}{2}\cos.\alpha'=\pm\left(A\sin.\alpha+\frac{B}{2}\cos.\alpha\right); \\
D\sin.\alpha'+E\cos.\alpha'=D\sin.\alpha+E\cos.\alpha.
\end{array}\right\}\ (15)$$

Digitized by Google

Mais les formules connues de trigonométrie

$$\cos.\alpha - \cos.\alpha' = 2\sin.\frac{\alpha'-\alpha}{2}\sin.\frac{\alpha'+\alpha}{2},$$

$$\sin.\alpha' - \sin.\alpha = 2\sin.\frac{\alpha'-\alpha}{2}\cos.\frac{\alpha'+\alpha}{2},$$

$$\sin.\alpha' + \sin.\alpha = 2\sin.\frac{\alpha'+\alpha}{2}\cos.\frac{\alpha'-\alpha}{2},$$

$$\cos.\alpha' + \cos.\alpha = 2\cos.\frac{\alpha'+\alpha}{2}\cos.\frac{\alpha'-\alpha}{2},$$

donnent les relations suivantes :

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\cos.\alpha - \cos.\alpha'}{\sin.\alpha' - \sin.\alpha} = \text{tang.}\dfrac{\alpha'+\alpha}{2}, \\ \text{et} \\ \dfrac{\sin.\alpha' + \sin.\alpha}{\cos.\alpha' + \cos.\alpha} = \text{tang.}\dfrac{\alpha'+\alpha}{2}; \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

En vertu de ces équations, la première des équations (15) donne, en prenant le signe $+$,

$$\frac{2A}{B} = \text{tang.}\frac{\alpha'+\alpha}{2},$$

et en prenant le signe $-$,

$$\frac{B}{2A} = -\text{tang.}\frac{\alpha'+\alpha}{2};$$

la seconde des équations (15) donne

$$\frac{D}{E} = \text{tang.}\frac{\alpha'+\alpha}{2}.$$

De là, on tire les deux équations de condition :

$$\left.\begin{array}{l} 2AE - BD = o, \\ 2AD + BE = o, \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17)$$

ou

$$BE - 2CD = o;$$
$$2CE + BD = o;$$

Digitized by Google

En général, on n'aura entre les coefficiens de l'équation (1) ni l'une ni l'autre de ces relations ; mais en changeant l'origine, on pourra, au moyen des deux indéterminées a et b, en établir une, et en même temps faire disparaître le terme tout connu pour simplifier l'équation. Elle se trouvera alors préparée de manière qu'en la rendant symétrique par rapport aux termes qui contiennent les carrés des inconnues, elle le deviendra en même temps par rapport aux termes du premier degré.

Lorsqu'on fait $x' = x'' + a$, $y' = y'' + b$, il faut dans l'équation transformée et dans les équations (17), changer D et E en D′ et E′, en posant

$$\left.\begin{aligned} D' &= 2Ab + Ba + D, \\ E' &= 2Ca + Bb + E, \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (18)$$

en vertu de la première des équations de condition (17), l'on obtient pour a et b

$$a = \frac{BD - 2AE}{4AC - B^2}, \quad b = \frac{BE - 2CD}{4AC - B^2},$$

valeurs infinies, et qui deviennent indéterminées quand $BD - 2AE = o$. On ne peut donc établir cette équation de condition entre les coefficiens, au moyen d'un simple changement de coordonnées. En vertu de la seconde équation de condition $2AD + BE = o$, et de son équivalente $2CE + BD = o$, on obtient facilement

$$\left.\begin{aligned} 2Ab + Ba &= -\frac{2AD + BE}{2(A+C)}, \\ 2Ca + Bb &= -\frac{2CE + BD}{2(A+C)}; \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (19)$$

au moyen de ces valeurs, les équations (18) deviennent

$$\left.\begin{aligned} D' &= \frac{2CD - BE}{2(A+C)}, \\ E' &= \frac{2AE - BD}{2(A+C)}. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (20)$$

Digitized by Google

Les équations (19) donnent, en multipliant la première par b et la seconde par a et en les ajoutant

$$Ab^2 + Bab + Ca^2 = -\frac{D(2AB + Ba) + E(2Ca + Bb)}{4(A + C)}$$

$$= \frac{AD^2 + BDE + CE^2}{4(A+C)^2};$$

par conséquent

$$F' = Ab^2 + Bab + Ca^2 + Db + Ea + F = \frac{AD^2 + BDE + CE^2}{4(A + C)^2} + Db + Ea + F \quad . \quad (21)$$

Nous avons vu plus haut que, pour rendre l'équation symétrique, il suffisait que l'on eût entre a et b la relation

$$2Ab + Ba = -\frac{2AD + BE}{2(A+C)};$$

si donc on transporte l'origine en un point de la droite dont l'équation est celle que nous venons d'écrire, ou bien encore la suivante :

$$2Ca + Bb = -\frac{2CE + BD}{2(A+C)},$$

la condition $2AD' + BE' = o$ sera satisfaite et la symétrie aura lieu. Si, de plus, on construit une seconde droite dont l'équation soit

$$Db + Ea = -\frac{AD^2 + BDE + CE^2}{4(A+C)^2} - F,$$

elle ira couper la première en un point pour lequel, quand on y place l'origine des coordonnées, $F' = o$.

Digitized by Google

L'équation de la courbe rapportée à cette nouvelle origine et aux nouveaux axes sera

$$\left.\begin{array}{l}\left[\left(A\sin.\alpha'+\frac{B}{2}\cos.\alpha'\right)y'+\left(A\sin.\alpha+\frac{B}{2}\cos.\alpha\right)x'\right]^2\\ +A(D'\sin.\alpha'+E'\cos.\alpha')\,y'+A(D'\sin.\alpha+E'\cos.\alpha)x'\end{array}\right\}=o \quad (22)$$

et comme

$$-\frac{B}{2A}=\frac{D'}{E'}=\frac{\sin.\frac{\alpha'+\alpha}{2}}{\cos.\frac{\alpha'+\alpha}{2}},$$

il vient

$$\frac{B}{2}=-\frac{A\sin.\frac{\alpha'+\alpha}{2}}{\cos.\frac{\alpha'+\alpha}{2}},\quad D'=\frac{E'\sin.\frac{\alpha'+\alpha}{2}}{\cos.\frac{\alpha'+\alpha}{2}};$$

on a de plus, en faisant

$$\frac{\alpha'+\alpha}{2}=\beta,\quad \frac{\alpha'-\alpha}{2}=\gamma;$$

$$H=A\sin.\alpha'+\frac{B}{2}\cos.\alpha'=-\left(A\sin.\alpha+\frac{B}{2}\cos.\alpha\right);$$

en prenant la première valeur de H, on a

$$H=A\sin.\alpha'-\frac{A\sin.\frac{\alpha'+\alpha}{2}}{\cos.\frac{\alpha'+\alpha}{2}}\cos\alpha'=A\frac{\sin.\alpha'\cos.\frac{\alpha'+\alpha}{2}-\cos.\alpha'\sin.\frac{\alpha'+\alpha}{2}}{\cos.\frac{\alpha'+\alpha}{2}}$$

$$=A\frac{\sin.\left(\frac{\alpha'-\alpha}{2}\right)}{\cos.\frac{\alpha'+\alpha}{2}}=A\frac{\sin.\gamma}{\cos.\beta}.$$

Digitized by Google

On parviendrait à la même expression, en posant

$$H = -A \sin.\alpha - \frac{B}{2}\cos.\alpha = -A\sin.\alpha + A\frac{\sin.\frac{\alpha'+\alpha}{2}}{\cos.\frac{\alpha'+\alpha}{2}}\cos.\alpha$$

$$= A\frac{\sin.\frac{\alpha'+\alpha}{2}\cos.\alpha - \sin.\alpha\cos.\frac{\alpha'+\alpha}{2}}{\cos.\frac{\alpha'+\alpha}{2}};$$

$$H = A\frac{\sin.\frac{\alpha'-\alpha}{2}}{\cos.\frac{\alpha'+\alpha}{2}} = A\frac{\sin.\gamma}{\cos.\beta} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (23)$$

Faisons d'une autre part

$$K = D'\sin.\alpha' + E'\cos.\alpha' = D'\sin.\alpha + E'\cos.\alpha;$$

on aura :

$$K = \frac{E'\sin.\alpha'\sin.\frac{\alpha'+\alpha}{2}}{\cos.\frac{\alpha'+\alpha}{2}} + E'\cos.\alpha' = E'\frac{\cos.\alpha'\cos.\frac{\alpha'+\alpha}{2}\sin.\alpha'\sin.\frac{\alpha'+\alpha}{2}}{\cos.\frac{\alpha'+\alpha}{2}}$$

$$K = E'\frac{\cos.\frac{\alpha'-\alpha}{2}}{\cos.\frac{\alpha'+\alpha}{2}} = E'\frac{\cos.\gamma}{\cos.\beta} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (24)$$

$$\cos.\beta = \sqrt{\frac{A}{A+C}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (25)$$

En substituant dans l'équation (22), on trouve

$$(y'-x')^2 + \frac{E'}{\sqrt{A^2+AC}}\frac{\cos.\gamma}{\sin.^2\gamma}(y'+x') = o. \quad . \quad (26)$$

Digitized by Google