CORRESPONDANCE

MATHÉMATIQUE ET PHYSIQUE

DE

L'OBSERVATOIRE DE BRUXELLES

PUBLIÉE

PAR A. QUETELET,

Directeur de l'observatoire de Bruxelles; professeur au musée; membre de l'académie des sciences et belles-lettres, et de l'institut des Pays-Bas; associé libre étranger de la société de statistique de Paris, de la société philomathique de la même ville, de la société royale astronomique de Londres, des académies royales de Berlin et de Turin; des sociétés des sciences naturelles et médicales de Heidelberg et de Wurzbourg; des sociétés de Gand, Liége, Rotterdam, La Haye, Utrecht, Cambrai.

—

TOME TROISIÈME.

BRUXELLES.

SOCIÉTÉ BELGE DE LIBRAIRIE

HAUMAN ET Co.

—

1837

Digitized by Google

l'hypothèse, déjà précédemment émise, de l'existence de petites planètes inconnues qui circuleraient autour du soleil, dans des orbites peu étendues, qu'elles parcourraient en des temps de courte durée.

Il vaut la peine, ce me semble, d'appeler sérieusement l'attention des astronomes sur ce sujet qui, certes, par le haut intérêt qu'il présente, mérite d'être examiné avec le plus grand soin, surtout par ceux qui possèdent de grands instrumens et qui sont en position de faire des observations très-précises.

Recherches mathématiques inédites de M. Ampère, membre de l'institut de France.

Les recherches mathématiques qui suivent, m'ont été communiquées par M. *Ampère*, quelque temps avant la mort de ce savant illustre. Elles faisaient partie de plusieurs notes ou feuilles détachées, qu'il voulut bien me confier, en m'abandonnant le soin de les mettre en ordre. Celles-ci présentaient même des indications si sommaires, que l'auteur, en les examinant, eut beaucoup de peine à reconnaître d'abord le but qu'il avait eu en les écrivant. Il fallut quelque temps pour les déchiffrer, et M. *Ampère*, avec une ténacité persévérante qu'il portait dans toutes ses recherches, refit pour ainsi dire tout le travail de la composition, pendant que je tenais la plume pour suivre le cours de ses idées.

Ces notes roulent en général sur des parties des mathématiques élémentaires que l'auteur cherchait à simplifier; et quelquefois au milieu des équations, se présentent, sans ordre et comme surpris de s'y trouver, quelques vers latins que l'auteur composait pour sa nomenclature des connaissances humaines. J'ai cru qu'on ne verrait pas sans intérêt les recherches suivantes, parce qu'on y trouvera une nouvelle preuve de la grande flexibilité de talens de M. *Ampère*, qui, non-seulement avait

Digitized by Google

cultivé la plupart des branches de nos connaissances, mais se complaisait encore à parcourir successivement tous les recoins du domaine de la science, pour y porter la lumière.

Si l'on réunit toutes les fractions continues qui, réduites sous leur forme la plus simple, donnent S pour somme de leurs quotiens entiers, le nombre de ces fractions sera égal à 2^{s-2}.

Par exemple, le fraction continue

$$\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3}}}$$

donne 6 pour la somme de ses quotiens entiers, 1, 2 et 3; on en conclura, d'après le théorème énoncé, qu'il y a 16 fractions continues qui jouissent de la même propriété.

La démonstration de ce théorème repose sur les considérations suivantes.

Les deux quantités $\frac{a}{b}$ et $\frac{b}{a}$ donnent, quand on les réduit en fractions continues, la même somme des quotiens entiers. En effet, supposons :

$$a > b \text{ et } \frac{a}{b} = q + \frac{a'}{b}; \text{ nous aurons } \frac{b}{a} = \frac{1}{q + \frac{a'}{b}} :$$

or, nous voyons déjà que les deux valeurs $\frac{a}{b}$ et $\frac{b}{a}$ donnent la même somme de quotiens entiers q et b.

Maintenant, il sera facile de voir que deux fractions simples qui ont le même dénominateur et dont la somme des numérateurs est égale à ce dénominateur, rentrent dans la condition, quand on les réduit en fractions continues, de donner toutes deux la même valeur pour somme de leurs quotiens entiers. Nous venons de voir que les fractions $\frac{a}{b}$ et $\frac{b}{a}$, sont dans ce cas : or, si nous transformons la première en $\frac{a}{b+a}$; et la seconde en $\frac{b}{b+a}$, les deux nouvelles fractions seront encore dans les

Digitized by Google

conditions dont il a été parlé plus haut, car si on les réduit en fractions continues, on aura :

$$\frac{1}{1+\frac{b}{a}} \quad \text{et} \quad \frac{1}{1+\frac{a}{b}}.$$

Or, puisque $\frac{b}{a}$ et $\frac{a}{b}$ donnent la même valeur pour somme des quotiens entiers, nos deux fractions nouvelles présenteront aussi cette même somme augmentée de l'unité.

Il sera facile, d'après cela, de former successivement toutes les fractions, qui, réduites en fractions continues, donnent pour somme de leurs quotiens entiers les suites des nombres naturels, et d'en estimer le nombre.

La première et la plus simple, est celle qui a pour dénominateur le nombre 2 et qui ne peut avoir pour numérateur que l'unité. Elle est unique dans sa classe, c'est ce qu'indique la formule 2^{s-2} qui devient $2^0 = 1$.

De cette première fraction, on déduit les deux suivantes, comme nous l'avons vu précédemment :

$$\frac{1}{1+2} = \frac{1}{3} \quad \text{et} \quad \frac{2}{2+1} = \frac{2}{3}.$$

Chacune de ces fractions donne naissance à deux nouvelles, par des procédés semblables, et l'on a :

$$\frac{1}{1+3} = \frac{1}{4}, \quad \frac{3}{3+1} = \frac{3}{4}; \quad \frac{2}{2+3} = \frac{2}{5}, \quad \frac{3}{3+2} = \frac{3}{5}.$$

On formerait ainsi facilement les huit fractions suivantes, qui, réduites en fractions continues, donnent toutes le nombre 5 pour somme des quotiens entiers.

$$\frac{1}{5} \quad \frac{4}{5} \quad \frac{3}{7} \quad \frac{4}{7} \quad \frac{3}{8} \quad \frac{5}{8} \quad \frac{2}{7} \quad \frac{5}{7}.$$

Digitized by Google

Sans pousser les développemens plus loin, on voit qu'en passant successivement d'un ordre au suivant, chaque fraction est remplacée par deux autres, ce qui élève leur nombre à 2^{s-2}, quand la somme des quotiens entiers est S.

Sur une méthode simple pour parvenir à la réduite des équations du quatrième degré.

Soit

$$x^4 + px^2 - qx + r = o \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

L'équation du quatrième degré, dont on a fait disparaître le terme en x^3. Soient de plus, d'après ce qu'on sait pour les racines a, b, c, d,

$$a + b + c + d = o. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

$$ab + ac + ad + bc + bd + dc = p \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

$$abd + abc + acd + bcd = -q. \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

$$abcd = r \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Des équations (2) et (3), on déduira d'abord :

$$c + d = -(a + b)$$

$$ab + cd + (a + b)(c + d) = p;$$

Par la substitution de la valeur de $c+d$ de la première de ces deux équations dans la seconde, il vient :

$$ab + cd = (a + b)^2 + p \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

On déduit, de même, de l'équation (4),

$$ab(d + c) + cd(a + b) = -q$$

ou

$$-ab(a + b) + cd(a + b) = -q,$$

en substituant encore à $c+d$ sa valeur $-(a+b)$. De la dernière équation, on tire

$$(cd - ab) = -\frac{q}{a + b}.$$

Digitized by Google

En retranchant cette équation, élevée au carré, de l'équation (6), également élevée au carré, on a :

$$4\,abcd = [(a+b)^2 + p]^2 - \frac{q^2}{(a+b)^2};$$

en développant et en observant que le premier membre de cette équation vaut $4r$ d'après (5), on parvient à l'expression suivante:

$$(a+b)^4 + 2p\,(a+b)^2 + p^2 - \frac{q^2}{(a+b)^2} - 4r = o\,,$$

d'où l'on tire la *réduite*, en multipliant tous les termes par $(a+b)^2$,

$$(a+b)^6 + 2p\,(a+b)^4 + (p^2 - 4r)\,(a+b)^2 - q^2 = o.$$

Une semblable méthode de substitution est applicable aux équations du troisième et du second degré.

On démontre facilement, par exemple, la propriété des racines des équations du second degré. Que l'on pose, en effet,

$$x^2 + px + q = o \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$
$$a + b = -p \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$
$$ab = q \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3);$$

mais on a évidemment

$$(a-b)^2 = (a+b)^2 - 4ab\,,$$

ce qui, à cause des égalités (2) et (3), devient,

$$(a-b)^2 = p^2 - 4q\,;$$

et, en extrayant la racine,

$$a - b = \sqrt{p^2 - 4q}.$$

Cette dernière égalité, combinée avec (2), par voie d'addition et de soustraction, donne successivement

$$a = -\frac{p}{2} + \sqrt{p^2 - 4q}$$

$$b = -\frac{p}{2} - \sqrt{p^2 - 4q}.$$

Digitized by Google