Hachette, Jean Nicolas Pierre, 1769-
18

CORRESPONDANCE

SUR

L'ÉCOLE ROYALE POLYTECHNIQUE,

A L'USAGE

DES ÉLÈVES DE CETTE ÉCOLE;

PAR M. HACHETTE.

Janvier 1814 — Janvier 1816.

TOME TROISIÈME.

ASTOR LIBRARY
NEW-YORK

PARIS,
Chez Mme Ve COURCIER, Impr.-Lib. pour les Mathématiques
et la Marine, quai des Augustins, n° 57.
1816.

C.R.

Digitized by Google

CORRESPONDANCE

SUR

L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE.

IIIe. Volume.

N°. II. *Mai* 1815.

§. I. ANALYSE.

Des principes fondamentaux (*) *et des règles générales du calcul différentiel.* (Extrait des leçons d'Analyse de M. Poinsot) (**).

I.

Dans le calcul infinitésimal, on considère les grandeurs comme formées par l'addition successive de leurs parties homogènes. On peut nommer ces parties ou différences successives, les élémens de la grandeur; et leur somme recompose la grandeur même, puisque c'est en ces élémens qu'on l'avait soi-même décomposée. Cela est manifeste.

Mais comme ces élémens ne seraient pas plus faciles à traiter que les grandeurs elles-mêmes, on prend à leur place d'autres quantités voisines qui soient faciles à évaluer par les premiers principes de la géométrie et du calcul. Si ces quantités voisines, que nous nommerons *différentielles*, s'approchent beaucoup des différences ou élémens, le résultat s'approchera beaucoup de la vérité : c'est ce

(*) Le programme adopté, il y a deux ans, pour l'enseignement de l'Ecole Polytechnique, porte qu'on exposera les principes du calcul différentiel par la considération des infiniment petits, et qu'on fera voir dans les cas plus simples, l'accord de cette méthode avec celle des limites, ou du développement en série.

(**) Cet extrait et le suivant relatif au changement de la variable indépendante, doivent être regardés comme des notes rapides qu'on a jugé à propos d'imprimer ici en faveur des Élèves.

Digitized by Google

§. III. PHYSIQUE.

Mémoire sur la réfraction de la lumière; par M. Ampère.

Lu à l'Institut, le 27 mars 1815.

L'auteur de ce mémoire met sous une forme très-simple les valeurs de deux lignes qui déterminent la position d'un plan tangent à une surface donnée, et il emploie ces valeurs ainsi transformées, à démontrer ce théorême :

« Si dans le milieu où entre le rayon et par le point où il rencontre la surface réfringente, on conçoit une infinité de droites dont les unes représentent des rayons réfractés, et les autres les prolongemens des rayons incidens; qu'on prenne sur ces lignes, à partir de leur intersection mutuelle, des distances qui soient en raison inverse des vîtesses de la lumière suivant leurs directions, savoir, pour les premières, en raison inverse des vîtesses qui ont lieu après la réfraction, et pour les secondes, de celles qui ont lieu auparavant; si par les points ainsi déterminés on conçoit ensuite deux surfaces, dont l'une passe par tous ceux qui se trouvent sur les rayons réfractés, et l'autre par tous ceux qui sont situés sur les prolongemens des rayons incidens; qu'enfin on mène deux plans, dont l'un soit tangent à la première surface au point où elle rencontre un rayon réfracté, et l'autre le soit à la seconde, au point où elle rencontre le prolongement du rayon incident correspondant, la commune intersection de ces deux plans tangens sera dans le plan qui sépare les deux milieux. »

De ce théorême sur les lois du mouvement de la lumière passant successivement par différens milieux, dépend la solution de toutes les questions relatives à la réfraction ordinaire et extraordinaire. Pour donner une idée suffisante du travail de M. Ampère, nous commencerons par ce qui est relatif à la détermination du plan tangent à une surface courbe; nous rappellerons ensuite les lois du mouvement de la lumière dans le cas dont nous parlons, telles qu'elles ont été données par M. Laplace, dans les Mémoires de l'Institut de 1809, et nous terminerons cette note par la démonstration du théorême qui est le principal objet du mémoire.

Si l'on représente par x, y, z, les trois coordonnées d'un des points d'une surface courbe, par ξ, η, ζ, les coordonnées du plan

Digitized by Google

qui la touche à ce point, et qu'on suppose pour abréger $\frac{dz}{dx} = p$, $\frac{dz}{dy} = q$, on aura pour l'équation du plan tangent :

$$\zeta - z = p(\xi - x) + q(\eta - y).$$

En faisant $\zeta = 0$ et $\eta = 0$ dans cette équation, on aura pour la partie de l'axe de x comprise entre l'origine et le plan tangent :

$$\xi = \frac{px + qy - z}{p},$$

et en y faisant $\zeta = 0$ et $\xi = 0$, on trouvera que la partie de l'axe des y comprise entre l'origine et le même plan est :

$$\eta = \frac{px + qy - z}{q}.$$

Les deux points déterminés par ces valeurs suffisent avec le point de contact pour donner la position du plan tangent, et on peut rendre très-simples les expressions de ξ et de η, en changeant les variables indépendantes de la manière suivante :

Si l'on nomme s et t les tangentes des angles que forment avec l'axe des z les projections sur les plans des $x\,z$ et des $y\,z$ de la droite menée de l'origine au point de contact, on aura $x = sz$, et $y = tz$; en substituant ces valeurs dans l'équation de la surface représentée en général par $F(x, y, z) = 0$, elle deviendra $f(s, t, z) = 0$, où l'on pourra considérer z comme une fonction des deux variables indépendantes s et t, on en tirera en la différenciant les valeurs de $\frac{dz}{ds}$, et de $\frac{dz}{dt}$ prises dans cette supposition ; et comme on aura d'ailleurs :

$$\frac{dz}{ds} = p\frac{dx}{ds} + q\frac{dy}{ds} = pz + ps\frac{dz}{ds} + qt\frac{dz}{ds},$$

ce qui donne :

$$\frac{dz}{ds} = \frac{pz}{1 - ps - qt} = \frac{pz^2}{z - px - qy} = -\frac{z^2}{\xi},$$

et qu'on trouvera de même :

$$\frac{dz}{dt} = \frac{qz}{1 - ps - qt} = \frac{qz^2}{z - px - qy} = -\frac{z^2}{\eta},$$

Digitized by Google

on en conclura pour ξ et η ces valeurs très-simples :

$$\xi = -\frac{z^2}{\frac{dz}{ds}} = -\frac{1}{\frac{1}{z^2}\cdot\frac{dz}{ds}},$$

et

$$\eta = -\frac{z^2}{\frac{dz}{dt}} = -\frac{1}{\frac{1}{z^2}\cdot\frac{dz}{dt}}.$$

M. Laplace a ramené tous les phénomènes de la réfraction ordinaire et extraordinaire à deux principes, dont le premier consiste en ce que la vîtesse de la lumière, dans un milieu, ne dépend en aucune manière de la forme de la surface qui termine ce milieu, ni de la nature de ceux qu'elle a pu traverser avant d'y entrer. En sorte que dans un milieu non cristallisé, cette vîtesse est une constante déterminée, et que, dans un milieu cristallisé, elle ne peut dépendre que de la direction du rayon relativement aux axes de cristallisation.

Le second principe est celui de la moindre action, en vertu duquel, si l'on suppose qu'un rayon de lumière traverse successivement deux milieux séparés par un plan, et qu'on prenne un point fixe sur sa direction dans l'un de ces milieux, et un point fixe sur sa direction dans l'autre, la somme des produits des distances de ces points fixes à celui où le rayon passe d'un milieu dans l'autre, par les vîtesses de la lumière suivant les lignes qui mesurent ces distances, est un minimum entre toutes les sommes de produits formés de la même manière relativement à d'autres points du plan qui sépare les deux milieux.

Au moyen de ces deux principes, il devient aisé de démontrer le théorême énoncé pag. 235.

On prendra pour origine des coordonnées le point où le rayon de lumière passe d'un milieu dans l'autre, pour axe des z la perpendiculaire élevée à ce point sur le plan qui les sépare, et pour axes des x et des y deux droites perpendiculaires entr'elles prises à volonté dans ce plan. Alors les rapports $\frac{x}{z}$ et $\frac{y}{z}$ que nous avons nommés s et t seront les tangentes des angles que forment avec la normale à la surface réfringente, pour la première surface les projections du rayon réfracté sur les plans des xz et des yz, et pour la seconde celles du rayon incident correspondant, en sorte qu'en distinguant par des primes les lettres qui se rapportent à la seconde surface, on aura pour déterminer les points où les plans tangens rencontrent

Digitized by Google

l'axe des x et celui des y, ces valeurs :

$$\xi = -\frac{1}{\frac{1}{z^2}\cdot\frac{dz}{ds}}, \qquad \eta = -\frac{1}{\frac{1}{z^2}\cdot\frac{dz}{dt}};$$

$$\xi' = -\frac{1}{\frac{1}{z'^2}\cdot\frac{dz'}{ds'}}, \qquad \eta' = -\frac{1}{\frac{1}{z'^2}\cdot\frac{dz'}{dt'}}.$$

Comme deux angles suffisent pour déterminer la direction d'une droite dans l'espace, il est évident que, de quelque manière que les vîtesses de la lumière dans chaque milieu soit donnée en fonction des angles que la direction du rayon forme avec leurs axes dans le cas où ils sont cristallisés, on pourra toujours par les formules connues de la trigonométrie sphérique, exprimer ces vîtesses par une fonction $\varphi(s, t)$ de s et t dans le milieu où entre le rayon, et par une fonction $\psi(s', t')$ dans celui dont il sort.

On trouvera aisément

$$z = \frac{1}{\varphi(s, t).\sqrt{1+s^2+t^2}},$$

$$z' = \frac{1}{\psi(s', t').\sqrt{1+s'^2+t'^2}}.$$

En nommant a et a' les perpendiculaires abaissées sur la surface réfringentes des deux points fixes, pris l'un sur le rayon réfracté et l'autre sur le rayon incident correspondant, on aura en vertu du principe de la moindre action :

$$d\left(a\varphi(s, t).\sqrt{1+s^2+t^2} + a'\psi(s', t').\sqrt{1+s'^2+t'^2}\right) = 0;$$

c'est-à-dire :

$$d\left(\frac{a}{z} + \frac{a'}{z'}\right) = 0.$$

Dans cette équation z est fonction des deux variables indépendantes s et t, et z' l'est des deux quantités s' et t', qui dépendent de s et t en vertu de deux relations qu'on obtient facilement, en nommant b et c les projections sur l'axe des x et sur celui des y de la distance des deux points fixes, ces relations sont :

$$as + a's' = b, \quad \text{et} \quad at + a't' = c,$$

qui donnent :

$$\frac{ds'}{ds} = \frac{dt'}{dt} = -\frac{a}{a'}.$$

Digitized by Google

Mais comme l'équation

$$d\left(\frac{a}{z}+\frac{a'}{z'}\right)=0$$

doit avoir lieu séparément à l'égard des deux variables indépendantes s, t, on a

$$\frac{a}{z^2}\cdot\frac{dz}{ds}+\frac{a'}{z'^2}\cdot\frac{dz'}{ds'}\cdot\frac{ds'}{ds}=0,$$

et

$$\frac{1}{z^2}\cdot\frac{dz}{dt}+\frac{1}{z'^2}\cdot\frac{dz'}{dt'}\cdot\frac{dt'}{dt}=0,$$

que les relations que nous venons de trouver changent en

$$\frac{1}{z^2}\cdot\frac{dz}{ds}=\frac{1}{z'^2}\cdot\frac{dz'}{ds'},$$

et

$$\frac{1}{z^2}\cdot\frac{dz}{dt}=\frac{1}{z'^2}\cdot\frac{dz'}{dt'}.$$

Ces valeurs étant les dénominateurs de celles de ξ, ξ', η, η', dont les numérateurs sont tous égaux à -1, on en conclura $\xi=\xi'$ et $\eta=\eta'$. La première de ces équations montre que les deux plans tangens coupent au même point l'axe des x, et la seconde qu'ils coupent aussi au même point l'axe des y, leur commune intersection rencontre donc ces deux axes, et se trouve par conséquent toute entière dans le plan des xy. *C. Q. F. D.*

Lorsque les milieux ne sont pas cristallisés, la vitesse y est la même dans toutes les directions, et les surfaces dont nous venons de parler deviennent par conséquent des sphères. En vertu du théorême qui vient d'être démontré, le rayon incident et le rayon réfracté se trouvent alors dans un plan perpendiculaire à la surface réfringente, et font avec la normale à cette surface des angles dont les sinus sont en raison inverse des vitesses, conformément à la règle de Descartes. Nous ne suivrons pas l'auteur de ce Mémoire dans les autres conséquences qu'il tire du même théorême, soit pour trouver par une construction, dont celle de Huyghens relative au rayon extraordinaire est un cas particulier, la direction du rayon réfracté, quand on connaît celle du rayon incident; soit pour déterminer l'inclinaison sous laquelle la réfraction se change en réflexion, et la direction que prend dans ce dernier cas un rayon réfléchi extraordinairement. Il est bien facile de suppléer aux détails dans lesquels nous pourrions entrer à cet égard.

Digitized by Google